12 дәріс. Тақырыбы: Жазықтықтағы түзудің теңдеуі. Екі түзудің жазықтықтағы өзара орналасуы және олардың арасындағы бұрыш.

ТҮЗУ СЫЗЫҚ

Түзудің бұрыштық коэффициент арқылы өрнектелген теңдеуі, бір нүктеден және екі нүктеден өтетін түзулердің теңдеулері, екі түзудің арасындағы бұрыш, екі түзудің қиылысуы

Түзудің бұрыштық коэфициент арқылы өрнектелген теңдеуі деп

$$y=kx+b$$

теңдеуін айтады. Мұнда $k=tg\ \alpha$ – түзудің Ох осінің оң бағытымен жасайтын бұрышының тангенсі, оны түзудің бұрыштық коэффициенті дейді, ал b – түзудің Оу осінен қиятын кесіндісі.

Түзудің жалпы теңдеуі деп А және В қатарынан нольге айналмайтын

$$Ax+By+C=0$$

Теңдеуін айтады. Егер A=0 болса, онда түзу Ох осіне параллель. Егер B=0 болса, түзу Оу осіне параллель. Егер C=0 болса, түзу координаталар басынан өтеді. Егер A=C=0 болса, түзу Ох осінің өзі болады, ал егер B=C=0 болса, түзу Оу осінің өзі болады.

Бір нүктеден өтетін түзудің теңдеуін

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

немесе

$$A(x - x_1)+B(y - y_1) = 0$$

Түрінде жазуға болады. Мұнда $M_1\ (x_1;\ y_1)$ – берілген нүкте.

Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

болады. $(x_1;y_1)$ және $(x_2;y_2)$ берілген нүктелер.

Егер екі түзу $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ теңдеулерімен берілсе, онда олардың арасындағы бұрыш

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

формуласымен есептеледі. Осыдан, егер екі түзу біріне-бірі параллель болса, түзулердің

$$k_1= k_2$$

деген параллельдік шарты шығады, ал егер екі түзу біріне бірі перпендикуляр болса, яғни

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ болса, онда түзулердің

$$1+k_1k_2 = 0$$

деген перпендикулярлық шарты шығады. Егер екі түзу
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ теңдеулерімен берілсе, олардың арасындағы бұрыш

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

формулаларымен анықталады, ал параллельдік шарт

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

түрінде, перпендикулярлық шарт

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

түрінде жазылады.

Түзудің кесінділері арқылы өрнектелген теңдеуі, үш нүктенің бір нүктеде жату шарты.

Егер координаталар басынан түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын p-ге тең, ал оның абсциссалар осінің оң бағытымен жасайтын бұрышы α-ға тең деп алсақ, берілген түзудің теңдеуін

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

түрінде жазуға болады. Мұндай теңдеуді түзудің нормаль теңдеуі дейді. Бұл теңдеудің коэффициенттері төмендегідей екі шартқа бағынады:

1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
2) $- p<0$.

Егер түзудің жалпы теңдеуі $Ax+By+C=0$ берілсе, оны $\pm\sqrt{A^2 + B^2}\cdot M = 1$ теңдігінен анықталатын M шамасына көбейтіп,

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

нормаль түрге келтіруге болады. Мұнда нормалаушы көбейткіш M- нің таңбасы шарт бойынша C-нің таңбасына қарама-қарсы болып алынады.
Берілген $M_1(x_1,y_1)$ нүктесінен берілген $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ түзуіне дейінгі қашықтық

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p$$

формуласымен есептелінеді. Егер түзу жалпы теңдеуімен берілсе,

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Бұл формулалармен есептегенде d оң сан да, теріс сан да болуы мүмкін. Егер берілген нүкте мен координаталар басы берілген түзудің екі жағында жатса, онда d – оң сан, ал егер берілген нүкте мен координаталар басы берілген түзудің бір жағында жатса, d – теріс сан болады. Егер қашықтық өзі ғана керек болса, онда

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

формуласын пайдаланады.

Түзуді берілген екі түзуден бірдей қашықтықта жататын нүктелердің геометриялық орны ретінде қарастыруға болады. Егер берілген екі түзу қиылысатын болса, онда бұл геометриялық орын екі түзудің қиылысу бұрыштарының биссектрисаларын анықтайды. Мұнда бір биссектриса үшін d_1 – d_2 болса, екінші биссектриса үшін $d_1 = -d_2$. бұл жерде d әрпінің таңбалары ескеріледі. Егер берілген екі түзу параллель болса, онда бұл геометриялық орын берілген түзулерге параллель болып, олардың дәл аралығынан өтеді. Бұл жағдайда да таңба ескеріледі. Мысал үшін 2x- y +1= 0 және 2x +4y -1 =0 түзулерінен бірдей қашықтықта жататын нүктелердің геометриялық орынын табайық. Берілген түзулер параллель болмайды, сондықтан мұндай геометриялық орын биссектрисаларды анықтайды. Егер геометриялық орынды анықтайтын түзудегі кез келген нүктені M(x,y) деп белгілесек,

$$d_1 = \frac{2x - y + 1}{-\sqrt{5}}, \qquad d_2 = \frac{2x + 4y - 1}{\sqrt{20}}$$

болады. Бір биссектриса үшін мына

$$\frac{2x - y + 1}{-\sqrt{5}} = \frac{2x + 4y - 1}{\sqrt{20}}$$

теңдігі, ал екіншісі үшін

$$\frac{2x - y + 1}{-\sqrt{5}} = -\frac{2x + 4y - 1}{\sqrt{20}}$$

теңдігі орындалады. Онда биссектрисалардың 6x +2y +1= 0,
2x – 6y + 3= 0 теңдеулері шығады. Биссектрисалардың біріне-бірі перпендикуляр екендігі көрініп тұр.

Егер 2x- y +1= 0, 2x +4y -1 =0 параллель түзулері берілсе, онда екеуіне де бірдей қашықтықта жататын нүктелердің геометриялық орны сол түзулердің арасында жататын, екеуіне де параллель түзуді анықтайды. Бұл берілген түзулер координаталар басының екі жағында жатады. Сондықтан $d_1 = d_2$ деп аламыз:

$$\frac{2x - y + 1}{-\sqrt{5}} = +\frac{2x + 4y - 1}{\sqrt{20}}.$$

Осыдан ізделініп отырган түзудің 8x +4y+ 1=0 теңдеуі табылады.